8.4.7 Příklady na součet nekonečné řady

Předpoklady: 080406

Př. 1: Zapiš číslo $0,\overline{24}$ jako zlomek v základním tvaru.

Zapíšeme si číslo jako součet nekonečné řady: $0,\overline{24} = 0,24 + 0,0024 + 0,000024 + ...$
Platí: $a_1 = 0,24$, $q = 0,01$

Dosadíme do vzorce: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0,24}{1-0,01} = \frac{0,24}{0,99} = \frac{24}{99} = \frac{8}{33}$.

Př. 2: Zapiš číslo $3,2\overline{64}$ jako zlomek v základním tvaru.

Problém: číslo $3,2\overline{64}$ nejde napsat jako součet nekonečné řady $\Rightarrow$ rozdělíme úkol na dvě části: číslo 3,2 připočteme k součtu řady $0,0\overline{64} = 0,064 + 0,00064 + 0,0000064 + ...$

$0,0\overline{64} = 0,064 + 0,00064 + 0,0000064 + ...$ $\Rightarrow$ platí: $a_1 = 0,064$, $q = 0,01$

Dosadíme do vzorce: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0,064}{1-0,01} = \frac{0,064}{0,99} = \frac{64}{990}$.

Sečteme obě čísla: $3,2 + \frac{64}{990} = \frac{1616}{495}$.

Př. 3: Zapiš číslo $0,\overline{9}$ jako zlomek v základním tvaru.

Zapíšeme si číslo jako součet nekonečné řady: $0,\overline{9} = 0,9 + 0,09 + 0,009 + ...$
Platí: $a_1 = 0,9$, $q = 0,1$

Dosadíme do vzorce: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0,9}{1-0,1} = \frac{0,9}{0,9} = 1$.

Dodatek: Výsledek samozřejmě vyvolá vlnu kontroverzí. Nejčastějším argumentem je, že $0,\overline{9}$ nemůže být to samé jako 1, protože k $0,\overline{9}$ musíme ještě přičíst 0,moc_nul_1, abychom jedničku získali. Argumentuji následovně:
Skutečnou hodnotu $0,\overline{9}$ nezískáme tak, že napíšeme libovolně velký konečný počet číslic 9 za desetinnou čárku, naopak hodnota $0,\overline{9}$ je číslo, ke kterému při psaní devítek za desetinnou čárku směřujeme (a nikdy se k němu nedostaneme). Tímto číslem je číslo, které se od jedničky liší o nekonečně málo (tedy vůbec) a tedy jednička sama.
Číslo, které musíme přičíst k číslu $0,\overline{9}$ není číslo 0,moc_nul_1. Před jedničku bychom museli napsat nul nekonečně mnoho a což znamená, že se k napsání jedničky nikdy nedostaneme a k číslu $0,\overline{9}$ musíme připočíst čistou nulu (takže se číslo $0,\overline{9}$ rovna 1).

Asi nepřesvědčivější se ukazuje nápad Lukáše Vomastka z 8.O 2023:
$0,\overline{9} = 9 \cdot 0,\overline{1} = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$.

Př. 4: Urči, pro která $x \in R$ jsou dané nekonečné řady konvergentní a pokud to jde, urči jejich součet.
a) $2 + 6x + 18x^2 + 54x^3 + ...$
b) $x + 2x + 4x + 8x + ...$

a) $2 + 6x + 18x^2 + 54x^3 + ...$
Platí: $a_1 = 2$, $q = 3x$ $\Rightarrow$ aby řada měla součet musí platit: $|q| < 1$
$\Rightarrow$ $|3x| < 1$ $\Rightarrow$ $|x| < \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$
$\Rightarrow$ pro součet řady potom platí: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1-3x}$

b) $x + 2x + 4x + 8x + ...$
Platí: $a_1 = x$, $q = 2$ $\Rightarrow$ aby řada měla součet, musí platit: $|q| < 1$, což nenastane nikdy.

Př. 5: Vyřeš rovnice:
a) $2x + x + \frac{x}{2} + ... = 10$
b) $2 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + ... = \frac{4}{3}x$

a) $2x + x + \frac{x}{2} + ... = 10$

levá strana: nekonečná geometrická řada $2x + x + \frac{x}{2} + ...$

Platí: $a_1 = 2x$, $q = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ řada má součet (platí $|q| < 1$)

Určíme součet levé strany: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2x}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2x}{\frac{1}{2}} = 4x$

Levou stranu rovnice nahradíme součtem: $4x = 10$
$x = \frac{5}{2}$

b) $2 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + ... = \frac{4}{3}x$

levá strana: nekonečná geometrická řada $2 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4} + ...$

Platí: $a_1 = 2$, $q = -\frac{x}{2}$ $\Rightarrow$ řada má součet, pokud platí $\left|-\frac{x}{2}\right| < 1$ $\Rightarrow$ $x \in (-2; 2)$.

Určíme součet levé strany: $s=\frac{a_1}{1-q}=\frac{2}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}=\frac{2}{1+\frac{x}{2}}=\frac{2}{\frac{2+x}{2}}=\frac{4}{2+x}$.

Levou stranu rovnice nahradíme součtem: $\frac{4}{2+x}=\frac{4}{3}x \quad / \cdot \frac{3(2+x)}{4}$.

$3=x(x+2)$

$x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$x_1=-3$ - není řešením rovnice, nesplňuje podmínku pro kvocient řady

$x_2=1$

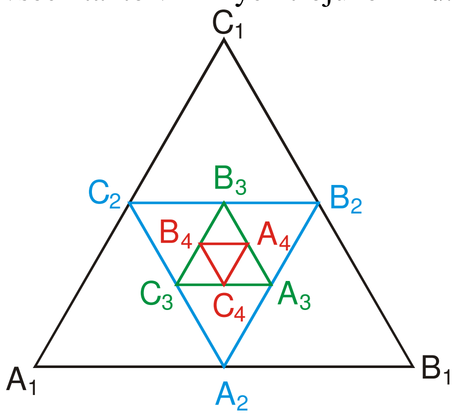
$K=\{1\}$

Př. 6: Do rovnostranného trojúhelníku $A_1B_1C_1$ o délce strany 4 je vepsán druhý trojúhelník $A_2B_2C_2$ jehož vrcholy leží ve středech stran trojúhelníku $A_1B_1C_1$. Podobným způsobem je do trojúhelníku $A_2B_2C_2$ vepsán trojúhelník $A_3B_3C_3$, do trojúhelníku $A_3B_3C_3$ trojúhelník $A_4B_4C_4$ a tak dále až do nekonečna. Urči:

a) součet obvodů

b) součet obsahů

všech takto vzniklých trojúhelníků.



Délka strany každého trojúhelníku je rovna polovině strany trojúhelníku, do kterého jsme jej vepsali $\Rightarrow$

trojúhelník $A_1B_1C_1$: $a=4$

trojúhelník $A_2B_2C_2$: $a=2$

trojúhelník $A_3B_3C_3$: $a=1$ $\quad\ldots$

a) součet obvodů

obvod trojúhelníku $A_1B_1C_1$: $4+4+4=12$

obvod trojúhelníku $A_2B_2C_2$: $2+2+2=6$

obvod trojúhelníku $A_3B_3C_3$: $1+1+1=3$

Získáme nekonečnou řadu: $12+6+3+\frac{3}{2}+\ldots$

Platí: $a_1 = 12$, $q = \frac{1}{2}$, součet existuje $|q| < 1$

Dosadíme do vzorce: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{12}{1-\frac{1}{2}} = \frac{12}{\frac{1}{2}} = 24$.

b) součet obsahů

obsah rovnostranného trojúhelníku: $S = \frac{av_a}{2} = \frac{a \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$

obsah trojúhelníku $A_1B_1C_1$: $4^2\frac{\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$

obsah trojúhelníku $A_2B_2C_2$: $2^2\frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

obsah trojúhelníku $A_3B_3C_3$: $1^2\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Získáme nekonečnou řadu: $4\sqrt{3} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{16} + \ldots$

Platí: $a_1 = 4\sqrt{3}$, $q = \frac{1}{4}$, součet existuje $|q| < 1$

Dosadíme do vzorce: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{4\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Př. 7: Vypočti: $2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \ldots$

Na první pohled neřešitelný příklad. Zkusíme přepsat odmocniny jako racionální mocniny:

$2 \cdot (2)^{\frac{1}{2}} \cdot (2)^{\frac{1}{4}} \cdot (2)^{\frac{1}{8}} \cdot \ldots$

použijeme vzorec pro součin mocnin: $2 \cdot (2)^{\frac{1}{2}} \cdot (2)^{\frac{1}{4}} \cdot (2)^{\frac{1}{8}} \cdot \ldots = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots}$

V exponentu jsme získali součet nekonečné geometrické řady: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

Platí: $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ řada má součet (platí $|q| < 1$)

Určíme součet řady: $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$2 \cdot (2)^{\frac{1}{2}} \cdot (2)^{\frac{1}{4}} \cdot (2)^{\frac{1}{8}} \cdot \ldots = 2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots} = 2^2 = 4$

$2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \ldots = 4$

Př. 8: Petáková:
strana 73/cvičení 73 b) f)
strana 73/cvičení 73 b) f)
strana 73/cvičení 74 d)

strana 73/cvičení 75 b) d)
strana 73/cvičení 77 b)
strana 73/cvičení 78 b)
strana 73/cvičení 79
strana 73/cvičení 80

Shrnutí: